MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 3
8.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I"

1. a) Seien X, Y, Z Mengen. Zeigen Sie
$$(X \setminus Y) \cap Z = (X \cap Z) \setminus (Y \cap Z).$$
   b) Für zwei Mengen M, N ist die *symmetrische Differenz* $M \,\Delta\, N$ definiert als
$$M \,\Delta\, N := (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$$
   (siehe auch Tut-Blatt 3/ Aufgabe 1).
   Seien A, B, C Mengen.
   i) Zeigen Sie, daß $(A \,\Delta\, B) \cap C = (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)$.
   Hinweis: Verwenden Sie a) und ein Distributivgesetz aus 2.8 der Vorlesung!
   ii) Skizzieren Sie die Mengen $(A \cap B) \,\Delta\, C$ und $(A \,\Delta\, C) \cap (B \,\Delta\, C)$ in einem Mengendiagramm und zeigen Sie, daß
$$(A \,\Delta\, C) \cap (B \,\Delta\, C) \subset (A \cap B) \,\Delta\, C.$$
   iii) Zeigen Sie durch ein Beispiel, daß in ii) im allgemeinen **nicht** die Gleichheit gilt.

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
   a) $\forall\, a, b \in \mathbb{Z} : \ [a \cdot b \text{ ist ungerade} \implies a + b \text{ ist gerade}]$
   b) $\forall\, a, b \in \mathbb{Z} : \ [(a + b \text{ und } a \cdot b \text{ sind gerade}) \implies (a \text{ und } b \text{ sind gerade})]$
   c) $\forall\, a \in \mathbb{Z} \ \exists\, b \in \mathbb{Z} \ \forall\, c \in \mathbb{Z} : \ (a + b) \cdot c$ ist gerade
   d) $\exists\, a \in \mathbb{Z} \ \forall\, b \in \mathbb{Z} \ \exists\, c \in \mathbb{Z} : \ (a + b) \cdot c$ ist gerade

3. a) Skizzieren Sie die Menge $\big([-2, -1] \cup [1, 2]\big) \times \big([-2, -1.5] \cup [2, 3]\big) \subset \mathbb{R}^2$ im Koordinatensystem.
   b) Gegeben seien die Mengen $A := \{1, 2\}$ und $B := \{1, \{2\}\}$. Geben Sie die Mächtigkeiten der folgenden Mengen an:
$$A \cap B, \qquad A \cup B, \qquad A \times B, \qquad B \setminus A.$$
   c) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $M := \big\{1, \{a\}, \{1, a\}\big\}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $|\mathcal{P}(M)| = 8$?

4. Es seien A und B Mengen.
   a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
   b) Geben Sie ein Beispiel für A und B mit $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subsetneqq \mathcal{P}(A \cup B)$ an.
   c) Zeigen Sie, daß $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

Abgabe bis 15.11.2019, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).